制御理論

JOURNAL OF HAMRADIO INFORMATICS LETTERS THE UNIVERSITY OF TOKYO AMATEUR RADIO CLUB

No. 6

2024年4月5日

無線部開発班 JG1VPP

nextzlog.dev

目次

第1章　可制御性

制御則を構成するには、前提として、状態が観測可能で、極が任意に配置できる必要がある。

1.1　線形システムの分解

1.1.1　対角正準形

状態方程式が式 (1.1) で与えられる n 次 SISO 系を考える。

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t), \\ y(t) &= \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

行列 A で、固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ は、相異なる値と仮定する。固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ とし、行列 T を式 (1.2) とする。

$$T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \cdots & \boldsymbol{v}_n \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

固有値が相異なるので、T は正則で、逆行列が存在する。この行列 T を使用して、式 (1.3) に与える変数変換を行う。

$$\boldsymbol{x}(t) = T\boldsymbol{z}(t). \tag{1.3}$$

ここで、式 (1.1) より、

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{z}}(t) &= T^{-1}AT\boldsymbol{z}(t) + T^{-1}\boldsymbol{b}u(t), \\ y(t) &= \boldsymbol{c}T\boldsymbol{z}(t). \end{aligned} \tag{1.4}$$

これは行列 A を対角化する操作に当たり、

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

また、

$$\hat{\boldsymbol{b}} = T^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_n \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}T = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 & \cdots & \hat{c}_n \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Fig. 1.1 に示す通り、$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ に対応する系に分解できる。

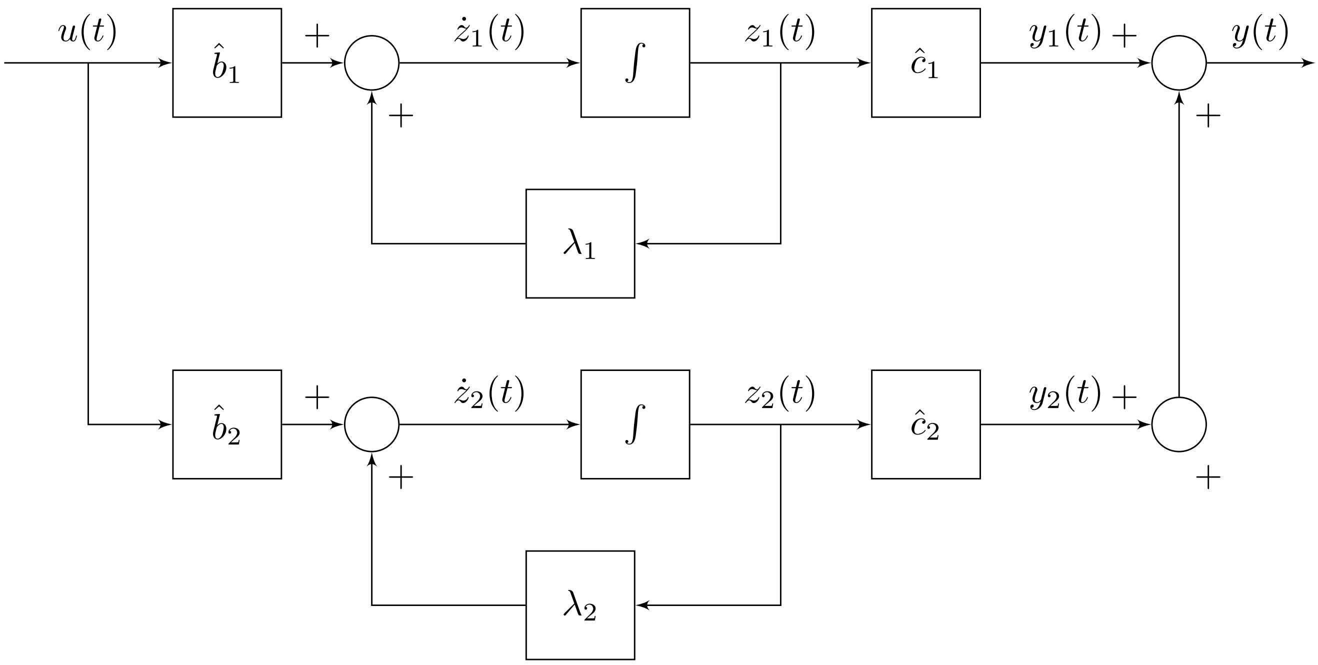


Fig. 1.1: linear subsystems.

状態 $z_i(t)$ は、$\hat{b}_i \neq 0$ ならば**可制御**で、$u(t)$ で制御できる。状態 $z_i(t)$ は、$\hat{c}_i \neq 0$ ならば**可観測**で、$y(t)$ で推定できる。

1.1.2　伝達関数との関係

式 (1.1) で、$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ と仮定し、$A, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を式 (1.7) で与える。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{1.7}$$

伝達関数を求めると、

$$G(s) = \boldsymbol{c}(sI - A)^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{c}\mathrm{adj}(sI - A)\boldsymbol{b}}{|sI - A|}. \tag{1.8}$$

$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ を代入して、余因子行列に関する公式を使用すると、

$$G(s) = \frac{5(s-1)(s-3)}{(s+2)(s-1)(s-3)} = \frac{5}{s+2}. \tag{1.9}$$

極零相殺で 1 次の伝達関数となり、3 次よりも低くなる。行列 A の固有値は $-2, 1, 3$ で、対応する固有ベクトルは、

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ 14 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

式 (1.2) の行列 T を構成すると、

$$T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 14 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

従って、

$$\hat{\boldsymbol{b}} = T^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \\ \frac{14}{5} \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{c}T = \begin{bmatrix} -25 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.12}$$

以上を第**??**節の議論に当てはめると、

- λ_1 の系は可制御で可観測
- λ_2 の系は不可制御で可観測
- λ_3 の系は可制御で不可観測

伝達関数には、可制御かつ可観測の部分系のみ出現する。式 (1.8) では、$s=-2$ の極のみ伝達関数 $G(s)$ に出現した。

1.2 可制御性

極配置法の必要十分条件は、系 $\{A,\boldsymbol{b}\}$ の可制御性である。式 (1.1) で、任意の状態 $\boldsymbol{x}_f$ と、全ての初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ に対し、有限な時刻 t_f で $\boldsymbol{x}(t_f)=\boldsymbol{x}_f$ とできれば、可制御である。

1.2.1 可制御グラム行列

n 次系で、式 (1.13) に定義する**可制御グラム行列**を考える。

$$W_c = \int_0^{t_f} e^{-A\tau}\boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{b}e^{-{}^tA\tau}d\tau. \tag{1.13}$$

可制御性の必要十分条件は、行列 W_c の正定値性である。行列 W_c は、式 (1.14) に示す**リアプノフ方程式**の解である。

$$ {}^tAW_c + W_cA + \boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{b} = O\big|_{t_f\to\infty}. \tag{1.14}$$

積の微分方程式から容易に導ける。

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left\{e^{{}^tAt}\boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{b}e^{At}\right\}dt = -\boldsymbol{b}{}^t\boldsymbol{b}. \tag{1.15}$$

ただし、前提として漸近安定の場合に限る。

$$\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0. \tag{1.16}$$

逆に、正定値行列 W_c が存在する場合、漸近安定である。また、W_c の固有値は、その状態の制御の容易さを表す。

十分性の証明

正定値行列 W_c を仮定すると、逆行列 W_c^{-1} が存在する。適当な時刻 $t_f \geq t$ を選び、操作 $u(t)$ を式 (1.17) で与える。

$$u(t) = {}^t\boldsymbol{b}e^{-{}^tAt}W_c^{-1}(-\boldsymbol{x}(0)+e^{-At_f}\boldsymbol{x}_f). \tag{1.17}$$

式 (2.7) より、可制御性が導かれる。

$$\boldsymbol{x}(t_f) = e^{At_f}\left(\boldsymbol{x}(0)-\boldsymbol{x}(0)+e^{-At_f}\boldsymbol{x}_{t_f}\right) = \boldsymbol{x}_f. \tag{1.18}$$

必要性の証明

非正定値行列 W_c に対し、式 (1.19) を満たす $\boldsymbol{x}_f$ を考える。

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{x}_fW_c\boldsymbol{x}_f = \int_0^{t_f} \|{}^t\boldsymbol{b}e^{-{}^tA\tau}\boldsymbol{x}_f\|^2 d\tau = 0, \\ \boldsymbol{x}_f \neq \boldsymbol{0}. \end{aligned} \tag{1.19}$$

連続関数なので、任意の t_f に対し、式 (1.20) が成立する。

$${}^t\boldsymbol{b}e^{-{}^tA\tau}\boldsymbol{x}_f = {}^t\boldsymbol{x}_fe^{-A\tau}\boldsymbol{b} = 0. \tag{1.20}$$

式 (1.1) の解は、式 (2.7) となる。ここで可制御と仮定する。

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\left(\boldsymbol{x}(0) + \int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau\right). \tag{1.21}$$

初期値 $\boldsymbol{x}_f$ から原点 $\mathbf{0}$ に遷移させる操作 $u(t)$ が存在して、

$$\boldsymbol{x}_f = -\int_0^{t_f} e^{-A\tau}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau. \tag{1.22}$$

従って、

$${}^t\boldsymbol{x}_f\boldsymbol{x}_f = -\int_0^{t_f} {}^t\boldsymbol{x}_f e^{-A\tau}\boldsymbol{b}u(\tau)d\tau = 0. \tag{1.23}$$

式 (1.19) と矛盾するので、可制御なら W_c は正定値である。

1.2.2　可制御行列

式 (1.24) の可制御行列 U_c の正則性も、可制御性を与える。

$$U_c = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b} & A\boldsymbol{b} & A^2\boldsymbol{b} & \cdots & A^{n-1}\boldsymbol{b}\end{bmatrix}. \tag{1.24}$$

1 入力なら U_c は正方行列なので、$|U_c|\neq 0$ と等価である。

十分性の証明

不可制御と仮定すると、式 (1.25) を満たす $\boldsymbol{x}_f$ が存在する。

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{x}_f W_c \boldsymbol{x}_f &= \int_0^{t_f} \|{}^t\boldsymbol{b}e^{-{}^tA\tau}\boldsymbol{x}_f\|^2 d\tau = 0, \\ \boldsymbol{x}_f &\neq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.25}$$

ここから、

$${}^t\boldsymbol{b}e^{-{}^tAt}\boldsymbol{x}_f = 0. \tag{1.26}$$

t で微分して $t{=}0$ とすると、

$$\begin{bmatrix} {}^t\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b}{}^tA \\ {}^t\boldsymbol{b}({}^tA)^2 \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{b}({}^tA)^{n-1} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_f = {}^tU_c\boldsymbol{x}_f = \mathbf{0}. \tag{1.27}$$

式 (1.27) から、行列 U_c は非正則で、十分性が証明された。

必要性の証明

行列 A の特性方程式は、適当な実数 λ に対し、

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0. \tag{1.28}$$

λ を A に置換すると、ケーリー・ハミルトンの定理より、

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = O. \tag{1.29}$$

e^At を、適当な関数 $q_0(t), \ldots, q_{n-1}(t)$ で級数展開すると、

$$e^{At} = q_0(t)I + q_1(t)A + \cdots + q_{n-1}(t)A^{n-1}. \tag{1.30}$$

次数 n を下げられた。式 (2.7) より、

$$e^{-At}\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}(0) = \sum_{i=0}^{n-1} q_i(-\tau)A^i\boldsymbol{b}\int_0^t u(\tau)d\tau. \tag{1.31}$$

式 (1.31) が成立する必要条件は、式 (1.24) の正則性である。

1.3 可観測性

可観測なら、有限な時間 t_f で初期値 $\boldsymbol{x}(0)$ を推定できる。任意の速度で漸近的に収束する状態推定器を構成できる。

1.3.1 可観測グラム行列

n 次系で、式 (1.32) に定義する**可観測グラム行列**を考える。可観測性の必要十分条件は、行列 W_o の正定値性である。

$$W_o = \int_0^{t_f} e^{{}^tA\tau}{}^t\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}e^{A\tau}d\tau. \tag{1.32}$$

行列 W_o は、式 (1.33) に示すリアプノフ方程式の解である。

$${}^tAW_o + W_oA + {}^t\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}. \tag{1.33}$$

また、W_o の固有値は、その状態の観測の容易さを表す。

1.3.2 可観測行列

式 (1.34) の可観測行列 U_o の正則性も、可観測性を与える。

$$U_o = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{c}A \\ \boldsymbol{c}A^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}A^{n-1} \end{bmatrix}. \tag{1.34}$$

1.4 双対性

- 系 $\{A, \boldsymbol{b}\}$ が可制御なら、双対系 $\{{}^t\boldsymbol{b}, {}^tA\}$ は可観測
- 系 $\{\boldsymbol{c}, A\}$ が可観測なら、双対系 $\{{}^tA, {}^t\boldsymbol{c}\}$ は可制御

1.5 最小実現

可制御で可観測な状態空間を得ることを**最小実現**と呼ぶ。余分な状態変数を持つ系は、不可制御や不可観測となる。

第2章　最適制御

極配置法では、目標追従速度や応答の概形を設計できた。最適制御では、2 次形式のエネルギー関数を最小化する。

2.1　時間応答と入力の大きさ

式 (2.1) に示す外乱のないバネ・マス・ダンパ系を考える。

$$M\ddot{y}(t) + D\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t). \tag{2.1}$$

状態変数を式 (2.2) で定義する。

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

$M = 1, D = 5, K = 6$ とすると、状態空間表現は、

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = A\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \tag{2.3}$$

3 重の極 -3 を持つ状態フィードバック制御を設計する。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A - \boldsymbol{b}\boldsymbol{f})\boldsymbol{x}(t) = A_f\boldsymbol{x}(t). \tag{2.4}$$

A_f の固有値を -3 の重根に配置すると、帰還倍率 $\boldsymbol{f}$ は、

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

ここで、6 章の議論を復習しよう。

$$sX(s) - \boldsymbol{x}(0) = A_f X(s), \quad \text{where} \quad X(s) = \mathcal{L}[\boldsymbol{x}(t)]. \tag{2.6}$$

従って、式 (2.4) の時間発展の解は、式 (2.7) で与えられる。

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A_f)^{-1}\right]\boldsymbol{x}(0) = e^{A_f t}\boldsymbol{x}(0). \tag{2.7}$$

式 (2.7) の逆行列を求めると、

$$(sI - A_f)^{-1} = \frac{1}{(s+3)^2}\begin{bmatrix} s+6 & 1 \\ -9 & s \end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

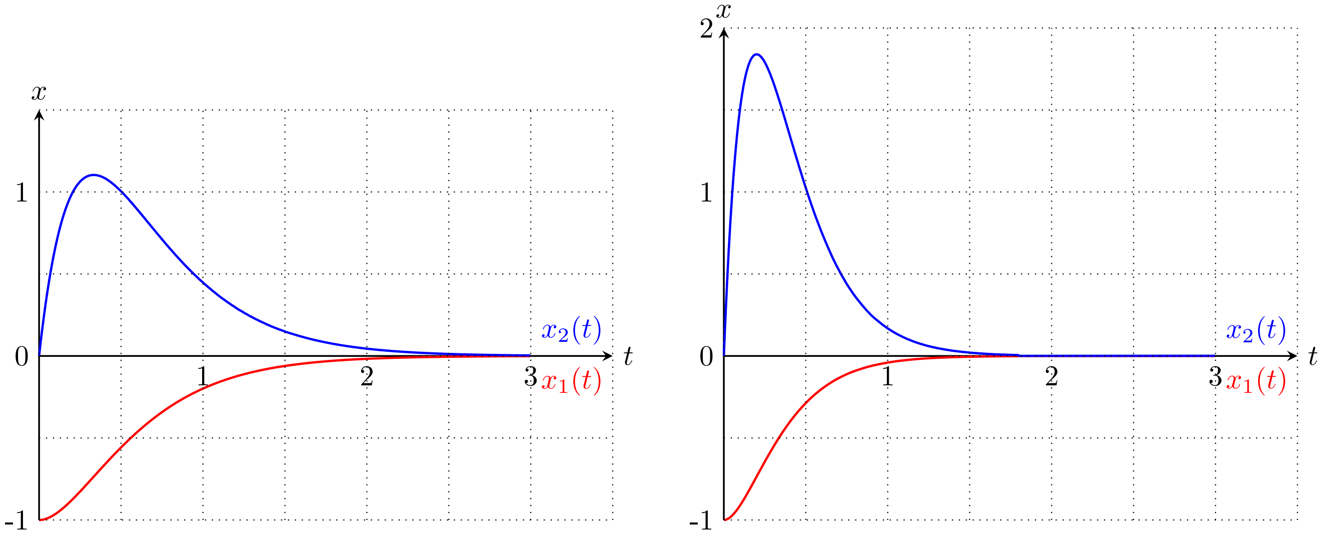
式 (2.9) の応答を得る。

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{-3t}\begin{bmatrix} 1+3t & t \\ -9t & 1-3t \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(0). \tag{2.9}$$

次に、固有値を -5 の重根に配置すると、帰還倍率 $\boldsymbol{f}$ は、

$$\boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} 19 & 5 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

適当に初期状態 $\boldsymbol{x}(0)$ を設定し、Fig. 2.1 に示す応答を得る。



(a) 極 -3 の応答.　(b) 極 -5 の応答.

Fig. 2.1: 極配置法の場合の応答.

極を負の領域の左側に配置すれば、追従速度が改善する。しかし、過大な操作で、安定余裕を損なう可能性もある。

2.2 評価関数による制御性能と入力の評価

状態 $\boldsymbol{x}(t)$ と操作 $u(t)$ の 2 乗の積分をエネルギーと呼ぶ。

$$J(\boldsymbol{x}) = \int_0^\infty \boldsymbol{x}^2(t)dt, \quad J(u) = \int_0^\infty u^2(t)dt. \tag{2.11}$$

例えば、第**??**節で極 -3 の場合のエネルギーは、

$$J(x_1) = \frac{5}{12}, \quad J(x_2) = \frac{3}{4}, \quad J(u) = \frac{3}{2}. \tag{2.12}$$

極 -5 の場合のエネルギーは、

$$J(x_1) = \frac{1}{4}, \quad J(x_2) = \frac{5}{4}, \quad J(u) = \frac{53}{2}. \tag{2.13}$$

追従速度に応じて、エネルギーが変化する様子がわかる。

2.3 評価関数を最小にする最適制御則

重み Q, r を乗じた式 (2.14) の評価関数を指標に設計する。

$$J = \int_0^\infty \left\{ {}^t\boldsymbol{x}(t)Q\boldsymbol{x}(t) + ru^2(t) \right\} dt. \tag{2.14}$$

制約付き最適化なので、Q, r には、トレードオフがある。

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_n \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

式 (2.14) を最小化する最適制御則は式 (2.16) で与えられる。

$$u(t) = -r^{-1}{}^t\boldsymbol{b}P\boldsymbol{x}(t). \tag{2.16}$$

正定値行列 P は、式 (2.17) のリッカチ方程式の解である。

$$ {}^tAP + PA - P\boldsymbol{b}r^{-1}{}^t\boldsymbol{b}P + Q = O. \tag{2.17} $$

証明は、辻峰男の現代制御理論ノートの付録を参照せよ。

$$ \min J = {}^t\boldsymbol{x}(0)P\boldsymbol{x}(0). \tag{2.18} $$

式 (2.16) の制御則は、必ず安定で、最適安定化制御と呼ぶ。閉ループ系の一巡伝達関数 L は、式 (2.19) で与えられる。

$$ L(s) = r^{-1}{}^t\boldsymbol{b}P(sI - A)^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{2.19} $$

ベクトル軌跡は -1 を中心とした単位円の右を通過する。

$$ \|1 + L(j\omega)\|^2 \geq 1, \quad \lim_{s\to\infty} L(s) = 0. \tag{2.20} $$

従って、無限の利得余裕と 60° 以上の位相余裕を備える。式 (2.3) の系で、重み Q, r と行列 P を式 (2.21) で与えよう。

$$ Q = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r = 1, \quad P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}. \tag{2.21} $$

式 (2.17) に代入すると、

$$ \begin{aligned} -p_2^2 - 12p_2 + 13 &= 0, \\ p_1 - 5p_2 - 6p_3 - p_2p_3 &= 0, \\ -p_3^2 + 2p_2 - 10p_3 + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{2.22} $$

P が正定行列である点に注意して解くと、

$$ P = \begin{bmatrix} -30 + 14\sqrt{7} & 1 \\ 1 & -5 + 2\sqrt{7} \end{bmatrix}. \tag{2.23} $$

式 (2.24) の制御則を得る。

$$ u(t) = -\begin{bmatrix} 1 & -5 + 2\sqrt{7} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t). \tag{2.24} $$

式 (2.25) の応答を得る。

$$ \boldsymbol{x}(t) = e^{-\sqrt{7}t} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{7}t & t \\ -7t & 1 - \sqrt{7}t \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(0). \tag{2.25} $$

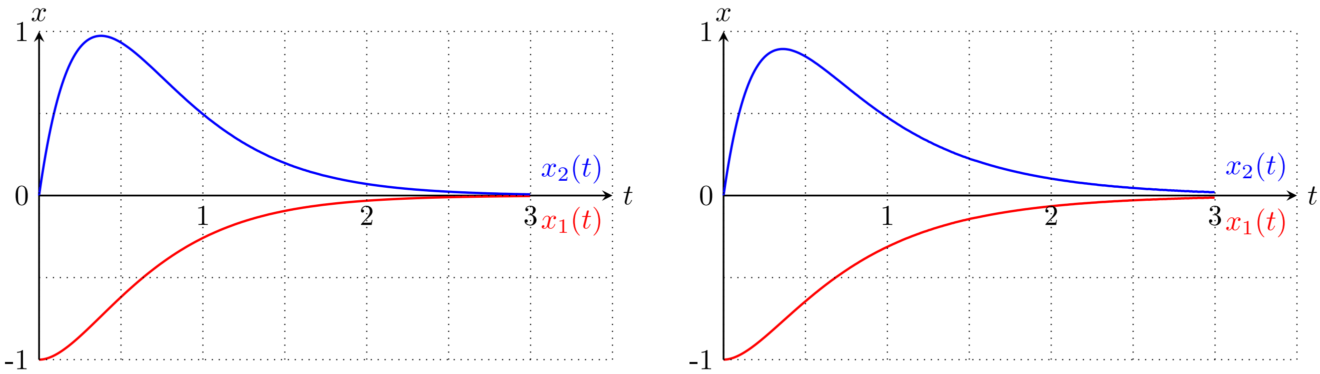
同じ手順で、式 (2.26) の重み Q, r で制御則を設計しよう。

$$ Q = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad r = 1. \tag{2.26} $$

正定値行列 P を求めると、

$$ P = \begin{bmatrix} 12 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.27} $$

Fig. 2.1 と同じ初期状態 $\boldsymbol{x}(0)$ に対する応答を、Fig. 2.2 に示す。



(a) $q_2 = 1$.　(b) $q_2 = 9$.

Fig. 2.2: 最適制御の場合の応答.

q_2 の調整により $x_2(t)$ の最大値が減少する様子がわかる。

2.4　折り返し法による最適レギュレータの設計

折り返し法は、最適制御則の主要極を指定の領域に移す。Fig. 2.3 に示す通り、直線 $-k$ の右側の極は、左に反転する。

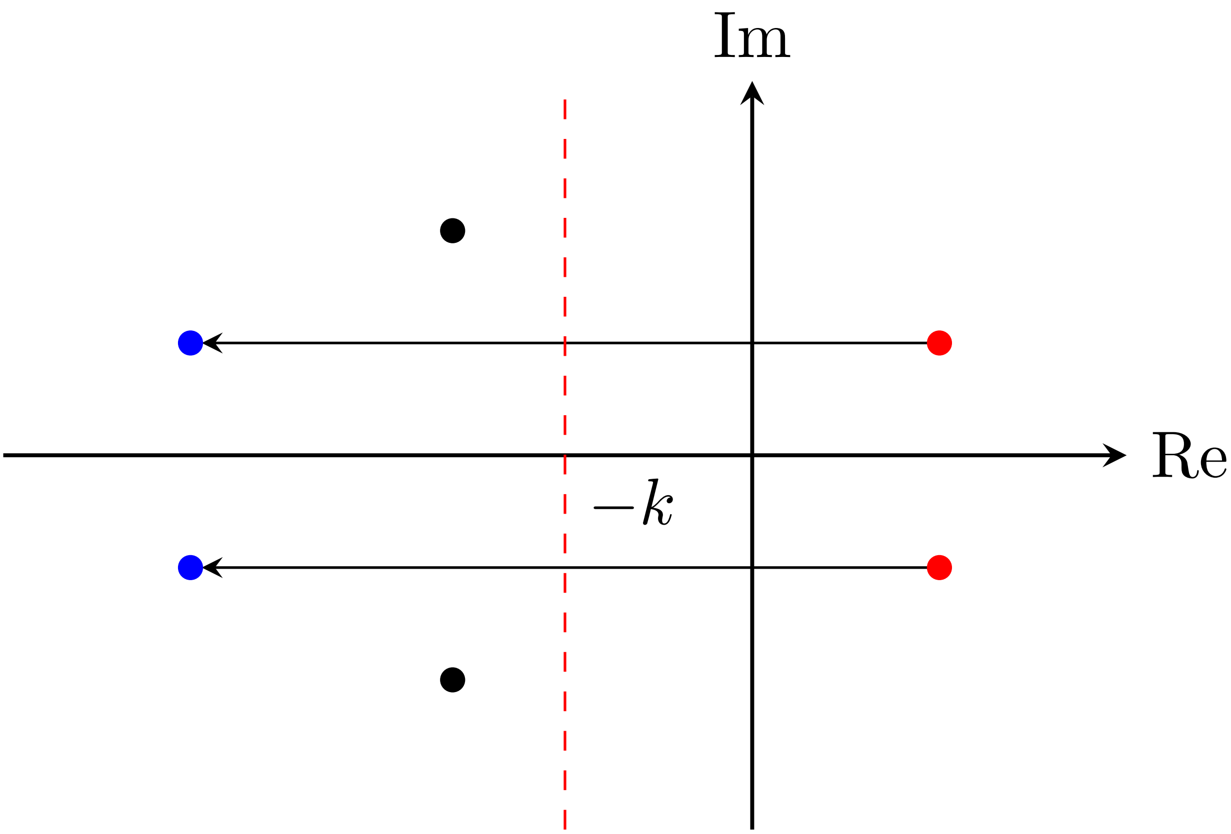


Fig. 2.3: 折り返し法による極の反転.

詳細は川崎・示村 (1979) を参照せよ。簡単に導出する。式 (2.17) で、A の固有値の 2 乗の集合を $\lambda^2(A)$ とすると、

$$\lambda^2(A) = \lambda^2(A - \boldsymbol{b} r^{-1} {}^t\boldsymbol{b} P). \tag{2.28}$$

実部が負の固有値を λ_i^- で、正の固有値を λ_j^+ で表すと、

$$\lambda(A - \boldsymbol{b} r^{-1} {}^t\boldsymbol{b} P) = \{..., \lambda_i^-(A), ..., -\lambda_j^+(A), ...\}. \tag{2.29}$$

式 (2.2) に代わって式 (2.30) の系を考えると、可制御である。

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = (A + kI)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t). \tag{2.30}$$

故に、式 (2.31) の最大解となる正定値行列 $\hat{P}$ が存在する。

$${}^t(A + kI)P + P(A + kI) - P\boldsymbol{b}r^{-1t}\boldsymbol{b}P = O. \tag{2.31}$$

$\lambda(A + kI) = \lambda(A) + k$ なので、式 (2.29) より、

$$\lambda(A - \boldsymbol{b}r^{-1t}\boldsymbol{b}\hat{P}) = \{..., \lambda_i^-(A), ..., -\lambda_j^+(A) - 2k\}. \tag{2.32}$$

制御則を式 (2.33) で与える。

$$u(t) = -r^{-1t}\boldsymbol{b}\hat{P}\boldsymbol{x}(t). \tag{2.33}$$

この制御則は、式 (2.34) の重み Q で式 (2.14) を最小化する。

$$Q = 2k\hat{P}. \tag{2.34}$$

全ての極が $-k$ の左に配置され、e^{-kt} より速く減衰する。